キャパシタに関する種々の数値解析

安竹洋平

2006/09/07

1　充放電

1.1　基本式

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{I}}{\frac{dV}{dt}} \tag{1}$$

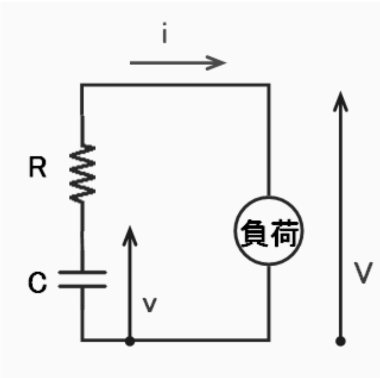

図 1: 等価回路

C	コンデンサの静電容量
R	直列内部抵抗
v	コンデンサの電圧 (初期電圧 v_0)
V	キャパシタ＋直列内部抵抗の端子間電圧 (初期電圧 V_0)
i	電流
t	放電開始からの経過時間

以下一連の計算は次の仮定に基づいている

1. キャパシタの等価回路は（コンデンサ＋直列内部抵抗）で表される
2. コンデンサの静電容量 C は電圧に依存しない
3. コンデンサの静電容量 C は電流に依存しない
4. 直列内部抵抗 R は電圧に依存しない
5. 直列内部抵抗 R は電流に依存しない

実際のキャパシタにおいて, 上記仮定は正しいか?

【エネルギー保存】負荷 $p(t)$ [W] とすれば

$$\frac{1}{2}Cv^2(t) + R\int_0^t i^2(s)ds + \int_0^t p(s)ds = \frac{1}{2}Cv_0^2 \tag{2}$$

【i と v の関係】: q=Cv を t で微分

$$i = -C\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

【i と V と $p(t)$ の関係】

$$p(t) = Vi \tag{4}$$

1.2 定電力放電

定電力放電時の, 各端子電圧の時間関数およびラゴーンプロットの関数を求める.
以下の図に示すように, 定電力負荷を P [W] とおく.

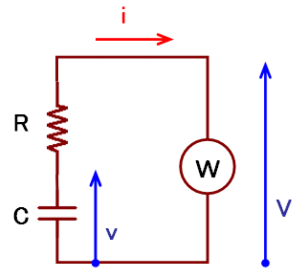

図 2: 定電力負荷の等価回路モデル

1.2.1 v と t の関係式

まず、キャパシタ電圧 v を時間の関数で表すことを考える.
(2) 式両辺を t で微分

$$Cv(t) \cdot \frac{dv}{dt} + Ri^2(t) + P = 0 \tag{5}$$

$\frac{dv}{dt} = v'$ とおいて (3) 式を代入, $\alpha = CR$, $\beta = \frac{P}{C}$ とおけば

$$\alpha v'^2 + vv' + \beta = 0 \tag{6}$$

v を左辺に

$$v = -\left(\frac{\alpha v'^2 + \beta}{v'}\right) \tag{7}$$

両辺を t で微分

$$v' = \left(\frac{\beta}{v'^2} - \alpha\right) \cdot \frac{dv'}{dt} \tag{8}$$

変数分離形なので積分でき

$$t = -\left(\frac{\beta}{2v'^2} + \alpha \log|v'|\right) + const. \tag{9}$$

ここで, v' は (6) 式より

$$v' = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \tag{10}$$

なお,$P \to 0$ $(4\alpha\beta \to 0)$ のとき $v' \to 0$ でなければならないため、平方根の符号は負にはならない。
初期条件：$t = 0$ のとき $v = v_0$ を (9) に代入し

$$t = \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{v_0'^2} - \frac{1}{v'^2}\right) + \alpha \log\left|\frac{v_0'}{v'}\right| \tag{11}$$

ただし

$$v_0' = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \tag{12}$$

以上により v と t の関係式が求まった。

1.2.2　V と t の関係式 1

次に外部端子電圧 V と t の関係式を求める.
(3, 4) より

$$v' = -\frac{\beta}{V} \tag{13}$$

(11) に代入して

$$t = \frac{1}{2\beta}(V_0^2 - V^2) + \alpha \log \frac{V}{V_0} \tag{14}$$

ただし

$$V_0 = -\frac{\beta}{p_0} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4\alpha\beta}}{2} \tag{15}$$

以上により, V と t の関係式が求まった.

1.2.3　V と t の関係式 2

別の解法を示す (GM Advanced Capacitor Summit 2006 発表資料より).

$$V = \frac{q}{C} - iR \tag{16}$$

を t で微分し

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{i}{C} - R\frac{di}{dt} \tag{17}$$

(4) より

$$\left(-V + \frac{\alpha\beta}{V}\right)\frac{dV}{dt} = \beta \tag{18}$$

積分して

$$-\frac{1}{2}V^2 + \alpha\beta \log V = \beta t - \frac{1}{2}V_0^2 + \alpha\beta \log V_0 \tag{19}$$

変形して

$$-\frac{V^2}{\alpha\beta}\exp\left(-\frac{V^2}{\alpha\beta}\right) = -\frac{V_0^2}{\alpha\beta}\exp\left(-\frac{V_0^2}{\alpha\beta} + \frac{2t}{\alpha}\right) \tag{20}$$

ランベルトのW関数

$$z = W(z)\exp(W(z)) \tag{21}$$

を用いれば

$$W_{-1}(z) = -\frac{V^2}{\alpha\beta} \tag{22}$$

$$z = -\frac{V_0^2}{\alpha\beta}\exp\left(-\frac{V_0^2}{\alpha\beta} + \frac{2t}{\alpha}\right) \tag{23}$$

より

$$V = \sqrt{-\alpha\beta W_{-1}\left(-\frac{V_0^2}{\alpha\beta}\exp\left[-\frac{V_0^2}{\alpha\beta} + \frac{2t}{\alpha}\right]\right)} \tag{24}$$

ただしここで $W_{-1}(z)$ は $W(z) < -1$ の分岐である．$(V^2 > \alpha\beta)$.

なお V_0 は, (4) を

$$V = v - iR \tag{25}$$

に代入し

$$V^2 - vV + \alpha\beta = 0 \tag{26}$$

よって

$$V_0 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4\alpha\beta}}{2} \tag{27}$$

以上により, V と t の関係式が求まった.

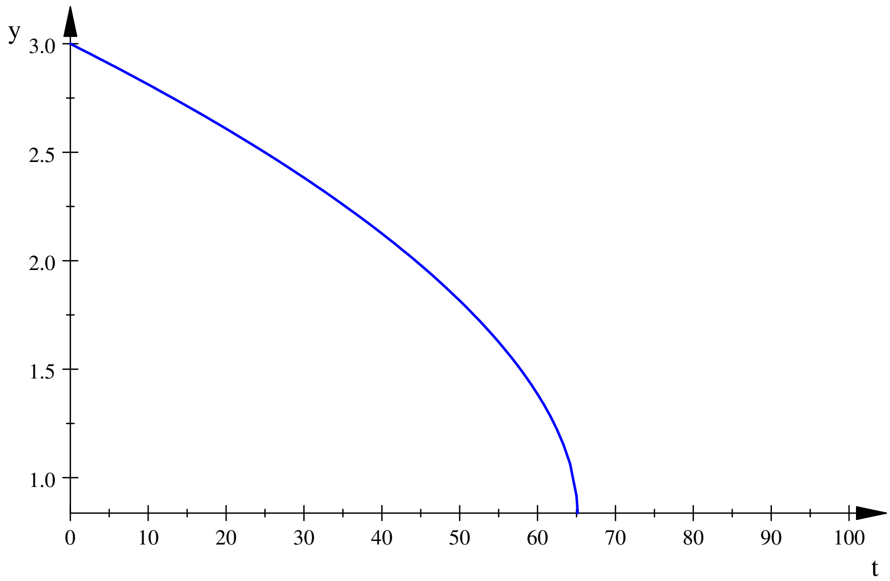

図 3: C=2000, R=0.007, P=100, V0=3 としたときの (24) 式グラフ

1.2.4 ラゴーンプロットの式

次にラゴーンプロットを与える式を求める.

$V = V_0$ から $V = V_1$ までの定電力放電を仮定すれば、取り出せるエネルギー E[W·s] は (14) より

$$\mathrm{E} = Pt_1 = \left(\frac{1}{2\beta}(V_0^2 - V_1^2) + \alpha \log \frac{V_1}{V_0}\right) P \tag{28}$$

もしくは

$$\mathrm{E} = \left(\frac{C}{2}V_0^2 - \alpha P \log V_0\right) - \left(\frac{C}{2}V_1^2 - \alpha P \log V_1\right) \tag{29}$$

と表記される. ただし V_0 は (15) で表される.

これがラゴーンプロットを与える式である.

なおこれは質量 1kg の場合の表式であり, 実際は質量 m で割る必要がある.

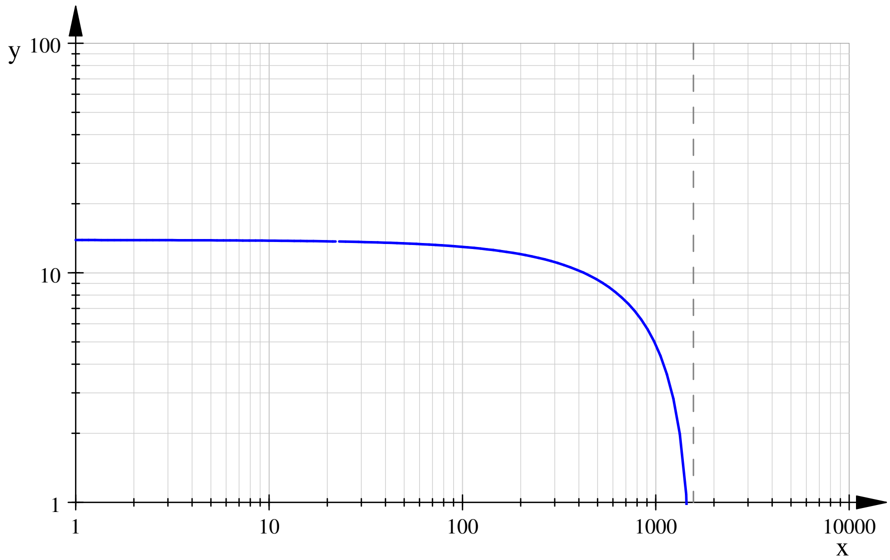

図 4: C=2000, R=0.007, v_0=4, V_1=2, m=0.24 としたときのラゴーンプロット

$$\frac{\dfrac{C\cdot\left(\dfrac{v0}{2}+\dfrac{\sqrt{v_0{}^2-4\cdot R\cdot m\cdot x}}{2}\right)^2}{2}-\dfrac{C\cdot V1^2}{2}+C\cdot R\cdot \ln(V1)-C\cdot R\cdot m\cdot x\cdot \ln\left(\dfrac{v0}{2}+\dfrac{\sqrt{v_0{}^2-4\cdot R\cdot m\cdot x}}{2}\right)}{3600\cdot m}$$

図 5: 演算用表式